



TITLE:

力学系における $\delta^{\infty}$  周期  
軌道と乱流のマルチフラクタル  
構造 (乱流研究 次の10年 : 乱流の動  
的構造の理解へ向けて)

AUTHOR(S):

本池, 巧; 有光, 敏彦

---

CITATION:

本池, 巧 ...[et al]. 力学系における $\delta^{\infty}$  周期軌道と乱流のマルチフラクタル構造 (乱流研究 次の10年 : 乱流の動的構造の理解へ向けて). 数理解析研究所講究録 2011, 1771: 88-105

ISSUE DATE:

2011-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171674>

RIGHT:

# 力学系における $\delta^\infty$ 周期軌道と乱流のマルチ フラクタル構造

Takumi Motoike\* (本池 巧)

*Faculty of Media and Information Resources, Surugadai University (駿河台大学 メ情)*

Toshihico Arimitsu† (有光 敏彦)

*Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba (筑波大学 数理)*

## 概要

充分発達した乱流において、速度差、エネルギー散逸率等の物理量は、小さい空間・時間スケールで観測した場合、強い間欠的な振る舞いを示す。マルチフラクタル PDF 理論 (MPDFT) は間欠性の源となる特異性の実空間に於ける分布に基づいたアンサンブル理論である。間欠性の特徴を取り出すために、観測点間隔  $\ell_0 \delta^{-k}$  を変えた一連の PDF を解析する。理論の枠組から得られる物理量が、観測点の拡大率  $\delta$  に依存しないという要請から導かれたスケーリング関係式について、1 次元離散力学系の  $\delta^\infty$  超安定周期軌道 (SSPO) の階層構造と軌道の不安定性に内在する間欠性より解析する。

## 1 はじめに

充分発達した乱流を記述するマルチフラクタル確率密度関数理論 (MPDFT) [1, 2, 3, 4, 5, 6] は、Navier-Stokes 方程式の尺度不変性に起因する特異性が物理空間にマルチフラクタル状に分布しているという仮定に基づくアンサンブル理論である。乱流の間欠性の特徴は、長さ  $\ell_k$

$$\ell_k = \ell_0 \delta^{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

を変えた一連の観測より求めた PDF を解析することで得られる。サンプリング間隔を決める  $\delta$  は実験観測者が自由に決めることができるので、理論から導き出される物理量は観測者が選んだ  $\delta$  には依存してはならない。この要請は、特異性の確率分布のエントロピー指数  $q$  に対してスケーリング関係式 [4, 5, 6]

$$\frac{1}{1-q} \frac{\ln 2}{\ln \delta} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \quad (2)$$

が成立を仮定することで満たされる。ただし、 $\alpha_\pm$  は乱流のマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  の二つのゼロ点、すなわち、 $f(\alpha_\pm) = 0$  ( $\alpha_- < \alpha_+$ ) である。 $\delta = 2$  の場合、スケーリング関係式 (2) は、 $2^\infty$  周期軌道のマルチフラクタル構造と冪的不安定性の間のスケーリング関係式 [13, 14] と同等な式となっている。従って、 $\delta \neq 2$  の場合の  $\delta^\infty$  周

期軌道を解析することでMPDFTの要請を満たすスケーリング関係式(2)の物理的な意味付けが可能になると予想される。本論文では、ロジスティック写像の $\delta^\infty$ 周期軌道の階層構造および安定性の解析より軌道の間欠性を特徴付けるスケーリング関係式を導きだし、MPDFTのスケーリング関係式(2)との関係について考察する。

多くの1次元離散力学系では、系の制御パラメータを増加させると1周期軌道から周期倍分岐を次々と繰り返すことで、 $2^k$ 周期軌道( $k > 2$ )が生み出される。系は $2^\infty$ 周期軌道が出現した後に、カオス状態となる。カオス状態になった後、更に制御パラメータを増やすと、無数の安定周期軌道(SPO=Stable Periodic Orbit)が出現する。 $\delta$ 安定周期軌道の $\delta$ 本の枝は1周期軌道と同様に周期倍分岐を繰り返してカオス状態へと至る( $\delta$ 周期の窓と呼ぶ)。 $\delta$ 周期の窓の内部にある一本の枝を拡大すると、その中には1周期軌道 $\rightarrow 2^k$ 周期軌道 $\rightarrow$ カオス状態 $\rightarrow \delta$ 周期の窓という構造が入れ子となって入っている。 $\delta$ 本の枝それぞれに $\delta$ 周期の窓が存在するので、全体として $\delta^2$ 周期の窓であり、その中には $\delta^2$ 安定周期軌道が存在する。このような $\delta$ 周期の窓の入れ子が繰り返されることで $\delta^k$ 安定周期が次々と生み出され、その極限に $\delta^\infty$ 周期軌道が存在する。

例として、ロジスティック写像

$$L(z, \mu) = 1 - \mu z^2 \quad (3)$$

の $\mu = 1.75 \sim 1.8$ 辺りに存在する3周期の窓を図1(a)に示す。 $\mu = 1.75$ で安定な3周期軌道が出現し窓が開く。この3周期軌道の三つの枝の一つに着目すると、周期倍分岐によって枝分かれを繰り返しカオス状態になった後に再び3周期の窓が出現する(図1(a)破線領域)。同様の窓が、他の二つの枝にも存在するので、全体として9周期の窓である。更に、図1(a)の中央の枝に存在する9周期の窓の一部を図1(b)に拡大して示す。この図から分かるように、9周期の枝の一つにも3周期の窓(図1(b)破線領域)が存在し、全体として27周期の窓となっている。このような3周期の窓の中に3周期の窓が入れ子になって存在しており、入れ子となった窓の中に $3^k$ 周期軌道が次々と存在しており、入れ子が集積して一点となった $\mu$ に於いて $3^\infty$ 周期軌道が現れる。

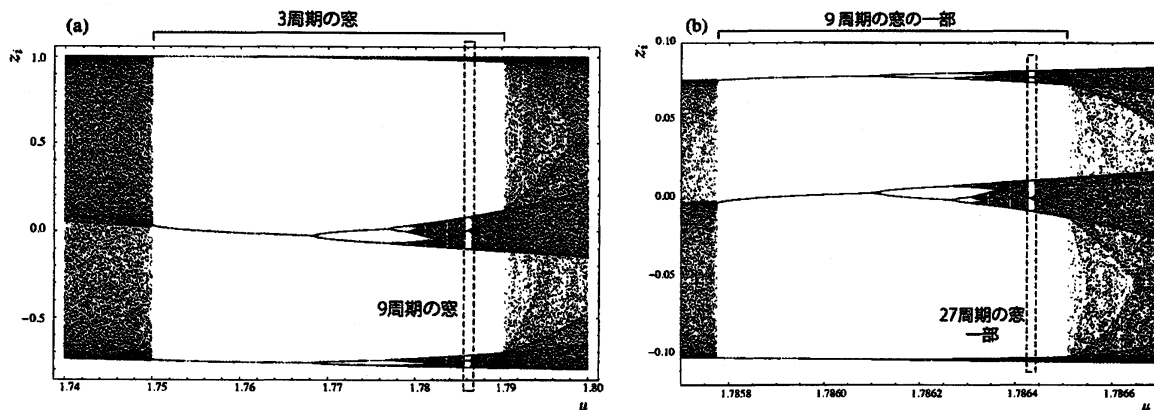


図 1: ロジスティック写像の分岐図。(a) 3周期の窓内の9周期の窓(破線領域) (b) 3周期窓中央の枝の拡大図。9周期の枝上の27周期の窓一部(破線領域)

$\delta^\infty$ 周期軌道は $\delta^k$ SPOとカオス軌道の境界に位置し、無限に長い周期を持つ。この

軌道に、有限の長さの周期の SPO に対する安定性の判定を適応することができない。 $\delta^\infty$  周期軌道は、カオス領域の内部に於いては不安定周期軌道として存在し続けるので、両者を区別するために、SPO とカオスの境界に存在する軌道を  $\delta^\infty$  超安定周期軌道 (SSPO=Super Stable Periodic Orbit) と呼び、カオス軌道と共存する軌道を  $\delta^\infty$  不安定周期軌道 (USPO=UnStable Periodic Orbit) と呼ぶこととする。なお、有限周期 SPO は、写像の臨界点  $z_c$  を含み超安定となる制御パラメータが必ず存在することと、 $\delta^\infty$  周期軌道が存在する制御パラメータ領域は一点に縮退していることから SSPO と見做すこととした。

## 2 $\delta^\infty$ 周期軌道の階層構造と冪的な振る舞い

$\mu = \mu_\infty^{(\delta)}$  において  $\delta^\infty$  SSPO が存在するとし、その軌道点を  $\{z_i = F^i(z_c, \mu_\infty^{(\delta)})\}_{i=1}^\infty$  と記す。写像  $F(z, \mu)$  が上に凸 (下に凸) の場合、 $z_1 = F(z_c, \mu)$  は軌道点全体の中の最大 (最小) の点であり、 $z_2 = F^2(z_c, \mu)$  は軌道点全体の中の最小 (最大) の点である。従って、軌道点全体は区間  $[z_2, z_1]$  ( $[z_1, z_2]$ ) に含まれる。点  $a$  と  $b$  を両端とする線分を、両端の大小関係を区別せずに  $[[a, b]]$  と表記することとすれば、線分  $I_1^{(0)} = [[z_1, z_2]]$  が  $\delta^\infty$  SSPO の位相空間となる。線分  $I_1^{(0)}$  を  $\delta^\infty$  SSPO の第 0 階層構造と呼ぶこともある。

$\delta^\infty$  SSPO の時間  $1 \leq i \leq 2\delta^k$  内の  $2\delta^k$  個の軌道点  $\{z_i\}_{i=1}^{2\delta^k}$  を考える。軌道点  $\{z_i\}_{i=1}^{2\delta^k}$  は、線分  $[[z_i, z_{i+\delta^k}]]$  ( $i = 1, 2, \dots, \delta^k$ ) 上に残りの  $2\delta^k - 2$  個の点が存在することはないという性質がある。 $z_1$  から  $z_2$  に向けて順に  $z_i$  と  $z_{i+\delta^k}$  のペアを作り  $\delta^k$  個の線分  $I_i^{(k)} = [[z_i, z_{i+\delta^k}]]$  ( $i = 1, 2, \dots, \delta^k$ ) が出来上がる。以下では、隣り合った軌道点を両端とする線分を「島」と呼ぶこととする。 $\delta^k$  個の島  $I_i^{(k)}$  は、 $\delta^\infty$  周期軌道の第  $k$  階層を形成する。写像  $F$  が上に凸ならば、島  $I_1^{(k)}$  は  $k$  によらず位相空間上一番右側 (軌道の最大値  $F(z_c, \mu_\infty^{(\delta)})$  を一端とする) に、島  $I_2^{(k)}$  は一番左側 (軌道の最小値  $F^2(z_c, \mu_\infty^{(\delta)})$  を一端とする) に位置し、写像が下に凸の場合、 $I_1^{(k)}$ 、 $I_2^{(k)}$  の配置は入れ換わる。また、臨界点  $z_c$  を含む島  $I_{\delta^k}^{(k)}$  および  $I_1^{(k)}$  は、それぞれ第  $k$  階層の中で幅が最大および最小の島である。

その後引き続き時間範囲  $2\delta^k + 1 \leq i \leq 2\delta^{k+1}$  内の  $2(\delta - 1)\delta^k$  個の軌道点  $\{z_i\}_{i=2\delta^k+1}^{2\delta^{k+1}}$  に注目する。これらの軌道点は、第  $k$  階層の  $\delta^k$  個の島各々の内部に  $2(\delta - 1)$  個ずつ配置される。即ち、 $I_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \delta^k$ ) には、 $2(\delta - 1)$  個の軌道点  $\{z_{i+p\cdot\delta^k}\}_{p=2}^{2\delta-1}$  が置かれる。島  $I_i^{(k)}$  それぞれについて、端から順にペアを作ると、 $\delta$  個の島  $I_{i+p\cdot\delta^k}^{(k+1)} = [[z_{i+p\cdot\delta^k}, z_{i+p\cdot\delta^k+n^{k+1}}]]$  ( $p = 0, 1, \dots, \delta - 1$ ) が形成される。 $\delta^k$  個の第  $k$  階層の各々の島から  $\delta$  個ずつ現れた総数  $\delta^{k+1}$  個の島  $I_i^{(k+1)} = [[z_i, z_{i+\delta^{k+1}}]]$  ( $i = 1, 2, \dots, \delta^{k+1}$ ) が  $\delta^\infty$  SSPO の第  $(k+1)$  階層である。 $\delta^\infty$  SSPO は、一つの島が  $\delta$  個の島に繰り返し分割を続ける  $\delta$  スケール・Cantor 集合としての階層構造を持つことがわかる。

$\delta^\infty$  SSPO の近傍には、無数の  $\delta^K$  SSPO ( $\mu = \mu_K^{(\delta)}$ ,  $1 \leq K < \infty$ ) が不安定化して共存している。これらの USPO も、 $\delta^\infty$  SSPO と同様な  $\delta$  個の島への分割が繰り返される階層構造を持つ。 $\delta^K$  USPO の階層構造を調べた結果、この軌道は第  $(K-2)$  階層までは  $\delta^\infty$  SSPO とほぼ同一の島構造を持ち、第  $(K-1)$  階層の島構造は、その周期性によって  $n^\infty$  SSPO の構造から多少のずれが生じる。 $K$  が十分大きければ、 $\delta^K$  SSPO が出現する  $\mu_K^{(\delta)}$  の値は、 $\mu_\infty^{(\delta)}$  とほとんど同じである。 $\mu = \mu_K^{(\delta)}$  に於ける  $\delta^K$  SSPO の階層構造は、

$\mu = \mu_\infty^{(\delta)}$  に於けるそれとほとんど同一と考えられる。従って、 $\delta^K$  ( $K \gg 1$ ) SSPO は、第  $(K-2)$  階層までは  $\delta^\infty$  SSPO の階層構造を再現していると考えられる。以後、 $\mu = \mu_K^{(\delta)}$  に於ける  $\delta^K$  SSPO の第  $(K-2)$  までの階層構造を用いて  $\delta^\infty$  SSPO の階層構造を解析する。

ロジスティック写像  $L(z, \mu)$  に於いて  $\mu = \mu_{12}^{(3)}$  (表2) で現れる  $3^{12}$  SSPO を例に、その階層構造を調べる。全軌道  $\{z_i\}_{i=1}^{3^{12}}$  (図2(a)) の内、時刻  $i=1$  と  $i=2$  の軌道点  $z_1$  と  $z_2$  を両端とする島  $I_1^{(0)} = [[z_1, z_2]]$  が第0階層をなす (図2(b))。次に先頭6個の軌道点  $\{z_i\}_{i=1}^{2 \cdot 3}$  を端から順にペアを作って出来た三つの島、 $I_1^{(1)} = [[z_1, z_4]]$ 、 $I_2^{(1)} = [[z_2, z_5]]$ 、 $I_3^{(1)} = [[z_3, z_6]]$  が第1階層をなす (図2(c))。引き続き12個の軌道点  $\{z_i\}_{i=2 \cdot 3}^{2 \cdot 3^2}$  は、島  $I_i^{(1)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) の内部に配置される。軌道点  $\{z_j\}_{j=7}^{18}$  は、 $\{z_7, z_{10}, z_{13}, z_{16}\} \in I_1^{(1)}$ 、 $\{z_8, z_{11}, z_{14}, z_{17}\} \in I_2^{(1)}$ 、 $\{z_9, z_{12}, z_{15}, z_{18}\} \in I_3^{(1)}$  となるように配置される。

各島  $I_i^{(1)}$  毎に島上の6個の点を端からペアを作って島  $I_i^{(2)}$  を作る。 $I_1^{(1)}$  からは、 $I_1^{(2)} = [[z_1, z_{10}]]$ 、 $I_4^{(2)} = [[z_4, z_{13}]]$  と  $I_7^{(2)} = [[z_7, z_{16}]]$  が、 $I_2^{(1)}$  からは、 $I_2^{(2)} = [[z_2, z_{11}]]$ 、 $I_5^{(2)} = [[z_5, z_{14}]]$  と  $I_8^{(2)} = [[z_8, z_{17}]]$  が、 $I_3^{(1)}$  からは、 $I_3^{(2)} = [[z_3, z_{12}]]$ 、 $I_6^{(2)} = [[z_6, z_{15}]]$  と  $I_9^{(2)} = [[z_9, z_{18}]]$  が出来上がる。出来上がった九つの島  $\{I_i^{(2)} = [[z_i, z_{i+3^2}]]\}_{i=1}^{3^2}$  が第2階層を形成する (図2(d))。このように一つの島から三つの島が繰り返し現れながら、第11階層まで順に形成される。第12階層以降の構造を形成する島  $I_i^{(k)}$  ( $i=1, 2, \dots, 3^k$ ) の両端点  $z_i$  と  $z_{i+3^k}$  ( $k \geq 12$ ) は、軌道の周期性  $z_{i+j \cdot 3^{12}} = z_i$  ( $j=1, 2, \dots$ ) より、同一の点である。島  $I_i^{(k)} [[z_i, z_{i+3^k}]]$  の幅は0となり、新たな島は形成されないため、第11階層が最も微細な島構造である。

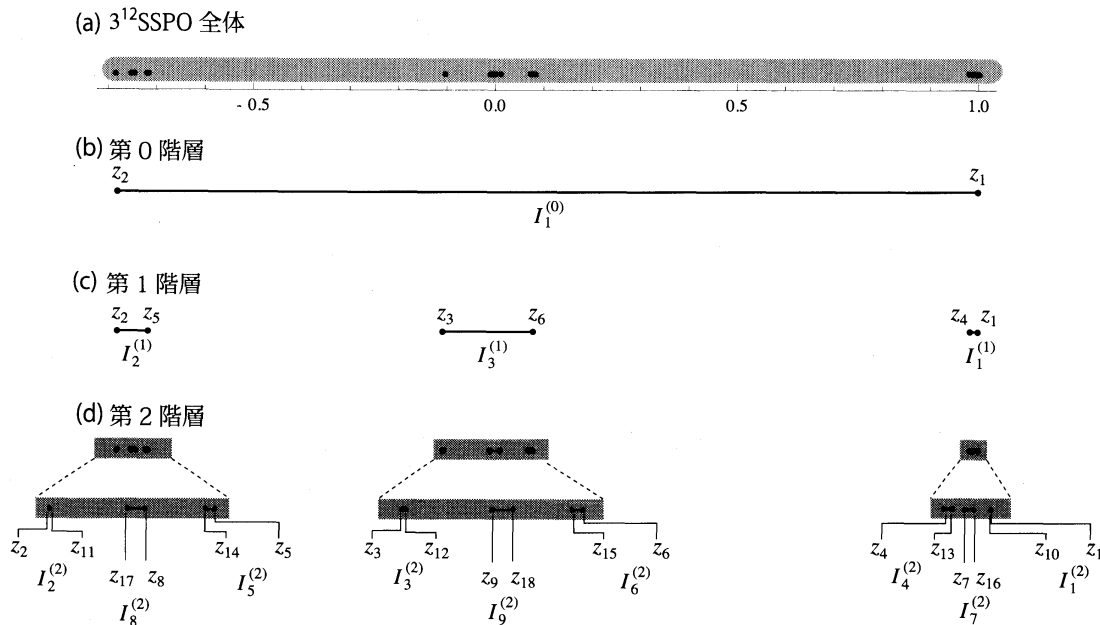


図2:  $3^{12}$  SSPO の階層構造：(a) 軌道全体 (b) 第0階層 (c) 第1階層 (d) 第2階層

$z_1$  と  $z_1 + dz_1$  を初期値とする二つの軌道を考える。時刻  $i$  での二つの軌道間の距離  $dz_i$

は

$$dz_i = |L^{i-1}(z_1 + \delta z_1) - L^{i-1}(z_1)| = \Xi_i \delta z_1 \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $\Xi_i$  は時刻  $i$  に於ける軌道間隔変化率

$$\Xi_i(\mu) = \left| \frac{\partial L^{i-1}}{\partial z} \right| (z_1, \mu) = \prod_{j=1}^{i-1} |L'_j(\mu)| \quad (5)$$

であり、写像  $|L'_j(\mu)|$  は  $z = z_j$  に於ける導関数の絶対値

$$|L'_j(\mu)| = \left| \frac{\partial L}{\partial z} \right| (z_j, \mu) \quad (6)$$

とした。第  $k$  階層の島  $I_i^{(k)} = [z_i, z_{i+\delta^k}]$  は写像  $L(z, \mu)$  によって、 $I_{i+1}^{(k)} = [z_{i+1}, z_{i+1+\delta^k}]$  に写される。 $k$  が十分大きければ島の幅  $|z_i - z_{i+\delta^k}|$  の時間  $i$  に対する時間変化が (4) で近似できることを考慮すると、島の階層構造は、軌道間隔変化率  $\Xi$  の時間発展と密接な関係を持つことがわかる。

$3^{12}$  SSPO に対する軌道間隔変化率  $\Xi_i$  の時間発展を両対数スケールで図 3(a) に示す。 $3^{12}$  超安定周期軌道の軌道間隔変化率は、軌道の階層構造を反映し複雑に増減を繰り返す。時刻  $i = 3^k$  ( $k = 1 \sim 11$ ) の値が時刻  $i$  に対して冪的に増大する (冪指数  $\sim i^{2.024}$ ) という特徴を持つ。

図 3(b) に時間  $1 \leq i \leq 3^5$  での  $3^{12}$  SSPO の軌道間隔変化率  $\Xi$  を縦軸ログスケールで示す。時間  $3^4 + 1 \leq i \leq 3^5$  に於ける軌道間隔変化率  $\Xi$  の振る舞いは、時間  $1 \leq i \leq 3^4$  とほぼ同じ振る舞いを縦方法にシフト (定数倍) したものが二回繰り返されることが確認される。同様に、時間  $3^k + 1 \leq i \leq 3^{k+1}$  ( $1 \leq k \leq 12$ ) に於ける軌道間隔変化率  $\Xi$  は、時間  $1 \leq i \leq 3^k$  と同じ振る舞いを二回繰り返される。 $\delta$  SSPO に於いては、時間  $\delta^k + 1 \leq i \leq \delta^{k+1}$  に於ける軌道間隔変化率  $\Xi$  の振る舞いは、時間  $1 \leq i \leq \delta^k$  と同じ振る舞いが縦方法にシフトされて  $\delta - 1$  回繰り返されるという入れ子構造になっていることがわかる。

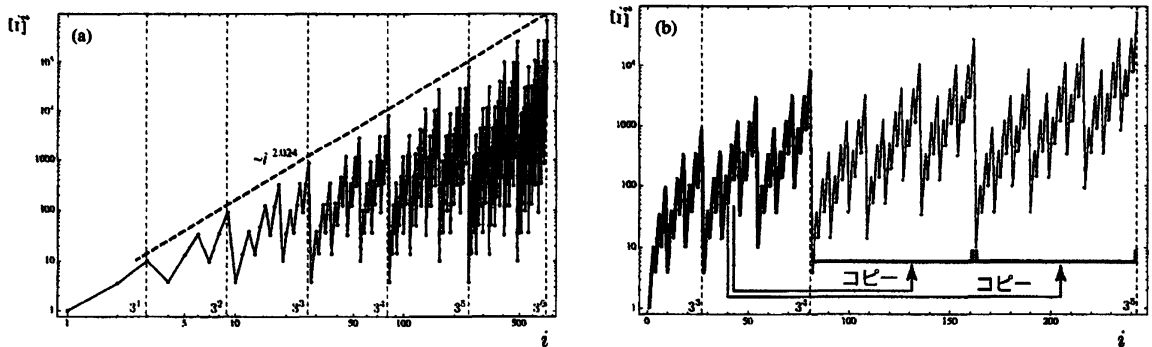


図 3:  $3^{12}$  周期軌道の軌道間隔変化率の時間変化。(a)  $i = 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$  に於ける軌道間隔変化率が  $\sim i^{2.0244}$  で増大する。(b)  $3^4 + 1 \leq i \leq 3^5$  に於ける軌道間隔変化率を横軸のみ対数目盛りで示す。 $1 \leq i \leq 3^4$  の振る舞いが二つ含まれていることが見て取れる。

### 3 $\delta^\infty$ 周期軌道の間欠性構造とスケーリング関係式

#### 3.1 写像導関数の構造

軌道間隔拡大率  $\Xi$  の冪的な振る舞い生み出す、各軌道点に於ける写像の傾きの絶対値の構造を解析する。 $\mu_4^{(5a)}$  (表 2) に於ける  $5^4$  SSPO の軌道点  $z_j$  に於ける写像の傾きの絶対値  $|L'|_j(\mu)$  ( $1 \leq i \leq 25 \times 5^4$ ) を図 4 に示す。ほぼ同じ値に縮退した点列が 4 本毎にグループを成し、垂直方向にほぼ等間隔に 4 グループ並ぶ形で、計 16 本の点列が観測される。各点列の左端点の時刻

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 125, 250, 375, 500 \quad (7)$$

を添字に持つ島  $I_i^{(k)}$  によって、点列に

$$I_1^{(0)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, I_4^{(1)}, I_5^{(1)}, I_{10}^{(2)}, I_{15}^{(2)}, I_{20}^{(2)}, I_{25}^{(2)}, I_{50}^{(3)}, I_{75}^{(3)}, I_{100}^{(3)}, I_{125}^{(3)}, I_{250}^{(4)}, I_{375}^{(4)}, I_{500}^{(4)} \quad (8)$$

と名付ける。なお、時刻  $i$  を下付き添え字に持つ複数の島  $I_i^{(k)}$  の内、一番小さい  $k$  を持つ島を点列の名前に採用する。

$|L'|_i$  の値がほぼ縮退した点列を、

$$\{I_1^{(0)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}, I_4^{(1)}\}, \{I_5^{(1)}, I_{10}^{(2)}, I_{15}^{(2)}, I_{20}^{(2)}\}, \{I_{25}^{(2)}, I_{50}^{(3)}, I_{75}^{(3)}, I_{100}^{(3)}\}, \{I_{125}^{(3)}, I_{250}^{(4)}, I_{375}^{(4)}, I_{500}^{(4)}\} \quad (9)$$

とグループ化する。各グループ先頭の下付き添え字の値の一番小さい点列

$$I_1^{(0)}, I_5^{(1)}, I_{25}^{(2)}, I_{125}^{(3)} \quad (10)$$

は、それぞれの属するグループ内で  $|L'|_i$  の値が最大である。(9) の左から  $p$  番目 ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) のグループに現れる点列  $I_{5^{p-1}}^{(p-1)}$ ,  $I_{2 \cdot 5^{p-1}}^{(p)}$ ,  $I_{3 \cdot 5^{p-1}}^{(p)}$ ,  $I_{4 \cdot 5^{p-1}}^{(p)}$  に属する各々の点の時刻  $i$  は、

$$i = [\text{各点列名の下付き添字}] + 5^p j \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

で与えられる。

一般に、 $\delta^K$  SSPO ( $\mu = \mu_K^{(\delta)}$ ) における  $|L'|_i$  は、 $(\delta - 1)K$  本のほぼ水平に並ぶ点列を構成する。点列を先頭の時刻  $i$  を下付き添字とする島  $I_i^{(k)}$  で名付ける。 $(\delta - 1)K$  本の点列は、それぞれが  $(\delta - 1)$  個の点列で構成された  $K$  個のグループ

$$\{I_{\delta^k}^{(k)}, I_{2\delta^k}^{(k+1)}, I_{3\delta^k}^{(k+1)}, \dots, I_{(\delta-1)\delta^k}^{(k+1)}\}_{k=0}^{K-1} \quad (12)$$

に分類される。 $K$  個のグループは、垂直方向に等間隔に並ぶ。同一グループの  $(\delta - 1)$  個の点列は、ほぼ同じ  $|L'|_i$  の値を持つ。各グループ内で  $|L'|_i$  の値が最大の点列は、

$$I_{\delta^k}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K - 1) \quad (13)$$

である。各グループ内のその他の点列  $I_{j\delta^k}^{(k)}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, \delta - 1$ ) の高低 ( $|L'|_i$  の値) は、考える SSPO によって異なる。(12) の  $p$  番目 (すなわち  $k = p - 1$ ) の点列グループ  $I_{\delta^{p-1}}^{(p-1)}$ ,  $I_{2\delta^{p-1}}^{(p)}$ ,  $\dots$ ,  $I_{(\delta-1)\delta^{p-1}}^{(p)}$  の  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, \delta$ ) 番目の点列に現れる点の時刻  $i$  は

$$\begin{aligned} i &= [\text{各点列名の下付き添字}] + \delta^p j \\ &= \delta^{p-1}(m + \delta j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

で与えられる。

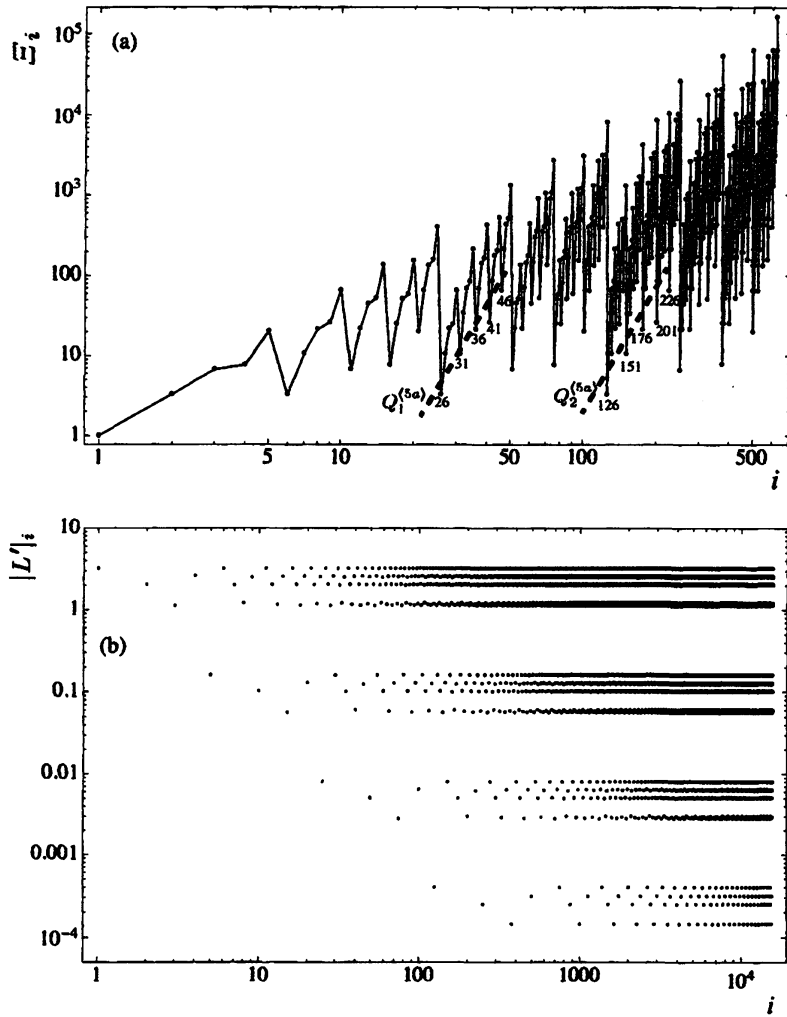


図 4:  $\mu = \mu_4^{(5a)}$  (表 2) における  $5^4$  超安定周期軌道の (a) 軌道間隔変化率  $\Xi_i$  と (b) 各時刻の軌道点に於ける写像関数の傾きの絶対値  $|L'_i|$

### 3.2 間欠性の抽出

$\delta^\infty$  不安定周期軌道に対する  $|L'_i|$  は、点列  $(\delta - 1)$  本で構成されたグループが垂直方向にほぼ等間隔で無限

$$\{I_{\delta^k}^{(k)}, I_{2\delta^k}^{(k+1)}, I_{3\delta^k}^{(k+1)}, \dots, I_{(\delta-1)\delta^k}^{(k+1)}\}_{k=0}^\infty \quad (15)$$

と続く。軌道間隔変化率  $\Xi_i$  が顕す間欠性の特徴は、 $|L'_i|$  が最大値となる点列  $(I_1^{(0)})$  に密接に関連していると考えられる。この点列の中で、更に  $|L'_i|$  の最大値を与える軌道点  $z_1$  を端点とする島の推移

$$I_{1,(1+\delta^k)}^{(k)} \rightarrow I_{1,(1+\delta^{k+1})}^{(k+1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

を解析する。ここで、島の下付添え字に採用されていない左端点の軌道点の時刻を、括弧を付して添え字に加えた。



階層  $k$  の島  $I_{1,(1+\delta^k)}^{(k)}$  は、階層  $(k+1)$  を構成する  $\delta$  個の島

$$I_{1,(1+\delta^k)}^{(k)} \rightarrow \{I_{1+(p-1)\delta^k, (1+(p-1)\delta^k+\delta^{k+1})}^{(k+1)}\}_{p=1}^{\delta} \quad (17)$$

に分割される。分割後の  $\delta$  個の島々の端点の内、島の名前に採用されていない端点の時刻  $1+(p-1)\delta^k+\delta^{k+1}$  ( $p=1, 2, 3, \dots, \delta$ ) を考える。この時刻での  $|L'|_i$  の値は、 $I_1^{(0)}$  で名付けられている点列に含まれる時刻  $i=1+\delta j$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) の中で

$$j=\delta(p-1)\delta^{k-1}+\delta^k \quad (p=1, 2, 3, \dots, \delta) \quad (18)$$

の点として現れる。図 5 に  $\mu=\mu_4^{(5b)}$  における  $5^4$  SSPO の (a) 軌道間隔変化率  $\Xi_i(\mu_4^{(5b)})$  の時刻  $i$  依存性 ( $1 \leq i \leq 5^4$ ) および (b) 写像導関数の大きさ  $|L'|_i(\mu_4^{(5b)})$  の時刻  $i$  依存性 ( $1 \leq i \leq 25 \times 5^4 : 25$  周期幅) 示す (両対数プロット)<sup>1</sup>。  $\delta=5$  の場合、 $k=1$  および  $k=2$  について (18) 式の  $j$  に対応する時刻  $i$  は、それぞれ  $\{26, 31, 36, 41, 46\}$  および  $\{126, 151, 176, 201, 226\}$  である。これらの時刻に於ける軌道間隔変化率  $\Xi_i$  は、ほぼ同じ指数の冪的増大を示している。

$\delta^\infty$  SSPO の間欠性を特徴付ける量として、各  $k$  に対し、時刻  $1+(p-1)\delta^k+\delta^{k+1}$  ( $p=1, 2, 3, \dots, \delta$ ) に於ける軌道間隔変化率  $\Xi_{1+(p-1)n^k+n^{k+1}}$  ( $p=1, 2, 3, \dots, n$ ) の冪的増大に注目する。両対数プロットで、 $k$  毎に  $p=1$  の点  $(1+n^{k+1}, \Xi_{1+n^{k+1}})$  と  $p=\delta$  の点  $(1+(\delta-1)\delta^k+\delta^{k+1}, \Xi_{1+(\delta-1)\delta^k+\delta^{k+1}})$  を結んだ線より求めた冪的増大の指数

$$Q_k^{(\delta)} = \frac{\ln \Xi_{1+(\delta-1)n^k+\delta^{k+1}} - \ln \Xi_{1+n^{k+1}}}{\ln [1+(\delta-1)\delta^k+\delta^{k+1}] - \ln (1+\delta^{k+1})} \quad (19)$$

の極限として得られる指数

$$Q^{(\delta)} = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k^{(\delta)} \quad (20)$$

が、 $\delta^\infty$  SSPO の間欠性を特徴付けていると考えられる。

図 6 の模式図に示すように、 $\delta^\infty$  SSPO の軌道間隔変化率  $\Xi_i$  は、二つの普遍的な構造：  
F1 (図 6 太実線)

$$\Xi_2 = \Xi_{1+\delta^{k+1}} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (21)$$

F2 (図 6 太一点鎖線)

$$\Xi_{2\delta} = \Xi_{1+(\delta-1)\delta^k+\delta^{k+1}} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

を持つことが明らかとなった (図 6 参照)。

一方、 $\mu_\infty^{(\delta)}$  が  $\mu=2$  (充分発達したカオス) に近づくと、 $|L'|_i$  に於ける  $\delta$  本の点列のグループ

$$\{I_{\delta^k}^{(k)}, I_{2\delta^k}^{(k+1)}, I_{3\delta^k}^{(k+1)}, \dots, I_{(\delta-1)\delta^k}^{(k+1)}\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

の値は、左端の点列  $I_{\delta^k}^{(k)}$  の値  $|L'|_{\delta^k}$  にほぼ縮退し、さらに、各グループの左端の点列  $I_{\delta^k}^{(k)}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) が対数プロットで等間隔に並ぶことが推測される。これらのことは、

<sup>1</sup>この  $5^4$  SSPO は、図 4 の 5 周期の窓より充分発達したカオス状態に近い別の 5 周期の窓の中に存在する。

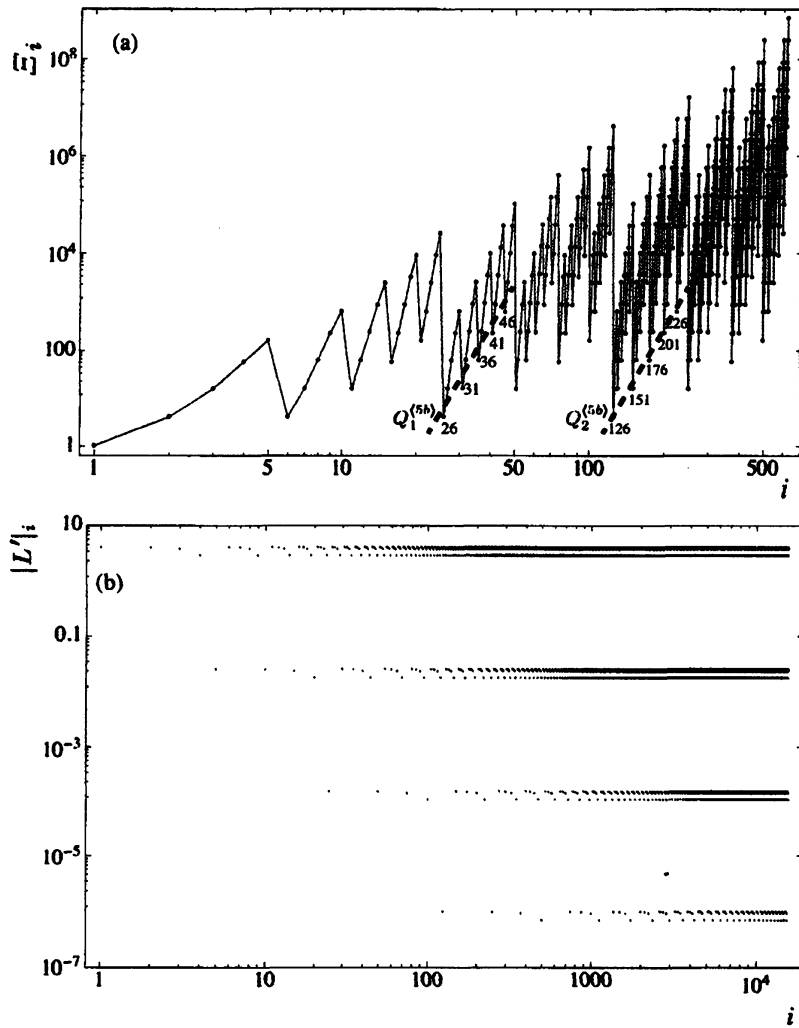


図 5:  $\mu = \mu_4^{(5b)}$  における  $5^4$  超安定周期軌道の (a) 軌道間隔変化率  $\Xi_i$  と (b) 各時刻の軌道点に於ける写像関数の傾きの絶対値  $|L'|_i$

図 4(b) と図 5(b) に示した二種類の  $5^4$  SSPO に対する  $|L'|_i$  の時刻  $i$  依存性 ( $1 \leq i \leq 25 \times 5^4$ ) の比較より確認できる。

そこで、 $|L'|_i$  について、以二つの仮定：

$C1$

$$|L'|_p = |L'|_1 \quad (p = 2, 3, 4, \dots, \delta - 1), \quad (24)$$

$C2$

$$\frac{|L'|_{\delta k}}{|L'|_{\delta k+1}} = \frac{|L'|_1}{|L'|_{\delta}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

を置く。以下、これらの仮定の下に (19) 式の解析を進めていく。

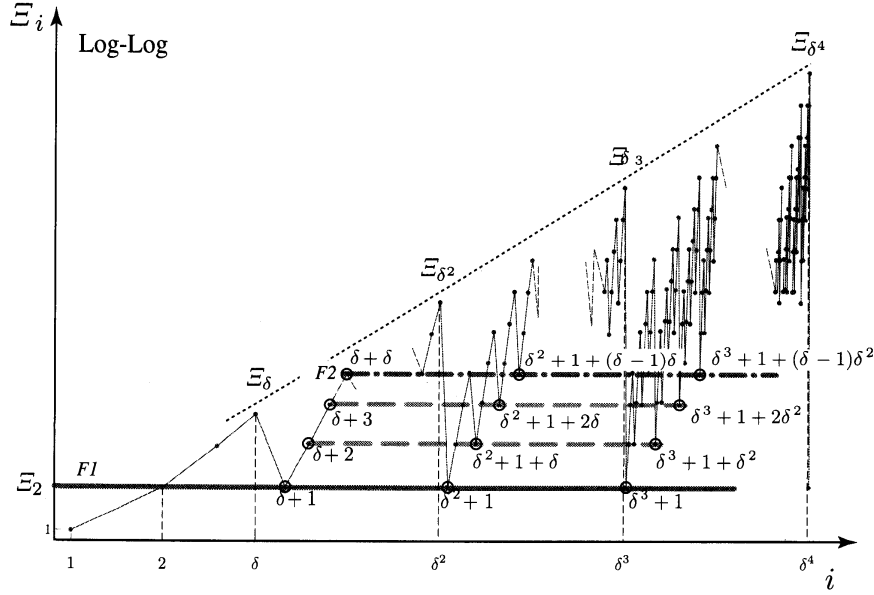


図 6: 軌道間隔変化率  $\Xi_i$  の概略図

普遍構造  $F1$  と  $F2$  を (19) 式に代入して

$$Q^{(\delta)} = \frac{\ln(\Xi_{2\delta}/\Xi_{\delta+1})}{\ln(2-1/\delta)} \quad (26)$$

を得る。定義 (5) と  $C1$  ((24) 式) より、

$$Q^{(\delta)} = \frac{(\delta-1) \ln |L'|_1}{\ln(2-1/\delta)} \quad (27)$$

が得られる。

$\delta$  本の縮退した点列グループの値を代表する点列  $I_{\delta^k}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) に対する時刻  $i = n^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) に対する、 $\Xi_i$  の座標点  $(\delta^k, \Xi_{\delta^k})$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) を結ぶ線の指数 (両対数プロットにおける傾き)

$$q^{(\delta)} = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k^{(\delta)} \quad (28)$$

を考えてみよう (図 6 点線参照)。ただし、

$$q_k^{(\delta)} = \frac{\ln \Xi_{\delta^{k+1}} - \ln \Xi_{\delta^k}}{\ln \delta^{k+1} - \ln \delta^k} \quad (29)$$

である。 $F1$  と  $\Xi_i$  の定義および  $C2$  より得られた関係式

$$\frac{\Xi_{\delta^{k+1}}}{\Xi_{\delta^k}} = \frac{|L'|_{\delta^k}}{|L'|_{\delta^{k+1}}} = \prod_{j=1}^k \frac{|L'|_{\delta^j}}{|L'|_{\delta^{j+1}}} = \left( \frac{|L'|_1}{|L'|_{\delta}} \right)^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

$$|L'|_{\delta} = (|L'|_1)^{-(\delta-2)} \quad (31)$$

を (29) に適用し

$$q^{(\delta)} = \frac{(\delta - 1) \ln |L'|_1}{\ln \delta} \quad (32)$$

を得る。(27) と (32) を比較すると、二つの冪的増大の指数  $Q^{(\delta)}$  と  $q^{(\delta)}$  の間の関係式

$$Q^{(\delta)} = \frac{\ln \delta}{\ln(2 - 1/\delta)} q^{(\delta)} \quad (33)$$

を得る。公式 (33) の検証結果を図 7 に示す。図中、式 (33) は実線で示され、各、 $2^{18}$  SSPO、 $3^{12}$  SSPO、 $4^{10}$  SSPO、 $5^8$  SSPO、 $6^8$  SSPO について求めた  $Q^{(\delta)}$  と  $q^{(\delta)}$  の平均値より得た  $Q^{(\delta)}/q^{(\delta)}$  が黒丸で示されている。

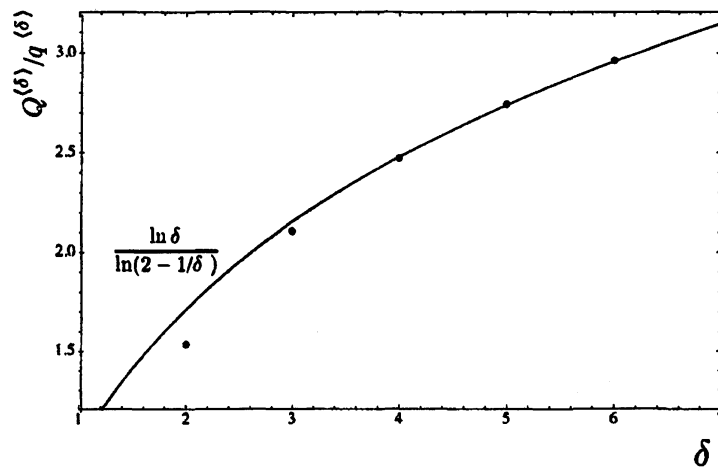


図 7:  $Q^{(\delta)}/q^{(\delta)} = \ln 2 / \ln(2 - 1/\delta)$  (実線) の検証。黒点は  $2^{18}$ 、 $3^{12}$ 、 $4^{10}$ 、 $5^8$ 、 $6^7$  SSPO を利用した  $Q^{(\delta)}/q^{(\delta)}$ 。  $Q^{(\delta)}$ 、 $q^{(\delta)}$  の値は、各  $\delta^K$  SSPO において、 $1 < k < K$  を満たす適切な範囲で  $Q_k^{(\delta)}$  と  $q_k^{(\delta)}$  を平均して求めた。

## 4 $\delta^\infty$ SSPO の階層構造と冪的増大指数

### 4.1 Feigenbaum のスケーリング則と SSPO の島構造

ロジスティック写像の 3 周期の窓の中において、 $3^k$  PSNB によって  $3^k$  SPO と  $3^k$  USPO が出現する。3 PSNB 発生時の 3 SPO 近傍の  $L(z, \mu)$  と  $L^3(z, \mu)$ 、および 9 PSNB 発生時の 9 SPO 近傍の  $L^3(z, \mu)$  と  $L^9(z, \mu)$  を図 8 に示す。3 SPO 近傍の  $L^3(z, \mu)$  (図 8 点線) と 9 SPO 近傍の  $L^9(z, \mu)$  (図 8 一点鎖線) の間に相似関係が成り立つことがわかる。同様な相似則が、 $3^k$  SPO 近傍の  $L^{3^k}(z, \mu)$  についても成り立つ。

$3^k$  SPO 近傍の  $L^{3^k}(z, \mu)$  に対する相似則は、一般に、 $\delta^k$  SSPO が出現する  $\mu_k^{(\delta)}$  に於ける  $L^{\delta^k}(z, \mu_k^{(\delta)})$  についても成り立ち、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \alpha_F^{(\delta)} \right)^k \left[ L^{\delta^k}(z_c + \Delta z / (\alpha_F^{(\delta)})^k, \mu_k^{(\delta)}) - z_c \right] = \hat{g}_0^{(\delta)}(\Delta z) \quad (34)$$

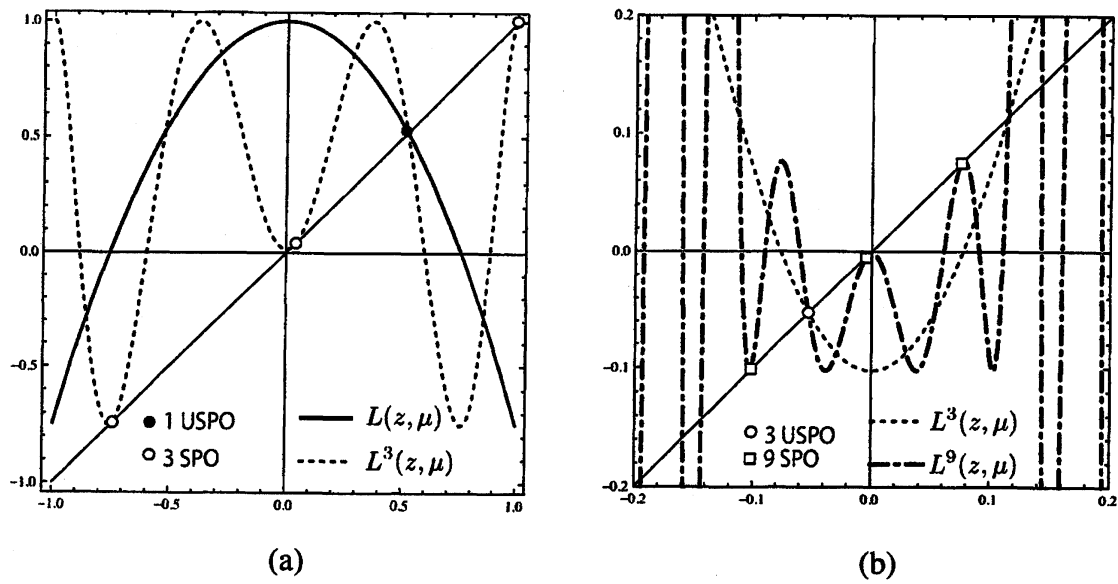


図 8: ロジスティック写像の  $3^k$  PSNB: (a) 3PSNB に於ける  $L(z, \mu)$  (実線) と  $L^3(z, \mu)$  (点線) (b) 9PSNB に於ける  $L^3(z, \mu)$  (点線) と  $L^9(z, \mu)$  (一点鎖線)

で定義される写像によらない普遍関数  $\hat{g}_0^{(\delta)}(z)$  の存在が予想される。一般に  $\hat{g}_0^{(\delta)}(z)$  を求めることは難しい。そこで、関数列

$$\hat{g}_r^{(\delta)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_F^{(\delta)})^k \left[ L^{\delta^k}(z_c + z/(\alpha_F^{(\delta)})^k, \mu_{k+r}) - z_c \right] \quad (35)$$

の極限を考えると、 $\hat{g}_r^{(\delta)}(z)$  は漸化式

$$\hat{g}_{r-1}^{(\delta)}(z) = \alpha_F^{(\delta)} \underbrace{\hat{g}_r^{(\delta)} \circ \dots \circ \hat{g}_r^{(\delta)}}_{\delta} (z/\alpha_F^{(\delta)}) \quad (36)$$

を満たす [7, 8, 9]。  $\hat{g}_r^{(\delta)}$  の  $r \rightarrow \infty$  での極限

$$\hat{g}^{(\delta)}(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{g}_r^{(\delta)}(z) \quad (37)$$

の存在を仮定すると、 $\hat{g}^{(\delta)}(z)$  は関数方程式

$$\hat{g}^{(\delta)}(z) = \alpha_F^{(\delta)} \underbrace{\hat{g}^{(\delta)} \circ \dots \circ \hat{g}^{(\delta)}}_{\delta} (z/\alpha_F^{(\delta)}) \quad (38)$$

の解として与えられる。この関数方程式は、Feigenbaum が周期倍分岐カスケードに於ける  $2^k$  SSPO に対して導出した関数方程式 [7, 8]

$$\hat{g}^{(2)}(z) = \alpha_F^{(2)} \hat{g}^{(2)} \circ \hat{g}_\delta^{(2)} (z/\alpha_F^{(2)}) \quad (39)$$

の一般化となっている。

(35) 式で  $k = K - r$  ( $K \gg 1$ ) とすると、

$$L^{\delta^{K-r}}(z_c + \tilde{z}, \mu_K^{(\delta)}) - z_c \sim \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^{K-r}} \hat{g}^{(\delta)}((\alpha_F^{(\delta)})^{K-r} \tilde{z}) \quad (40)$$

となる。ただし、 $\tilde{z} = z/(\alpha_F^{(\delta)})^{K-r}$  である。 $\delta^k$  SSPO の時刻  $i = \delta^k$  番目の点  $z_{\delta^k}$  は

$$z_{\delta^k} - z_c = L^{\delta^k}(z_c, \mu_k^{(\delta)}) - z_c = L^{\delta^k}(z_c, \mu_K^{(\delta)}) - z_c \sim \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^k} \hat{g}^{(\delta)}(0) \quad (41)$$

というスケーリング特性を持つ。(41) のスケーリング則および  $F1$  から導いた (31) 式を (29) 式に代入すると、軌道点  $z_{\delta^k}$  のスケーリング則と  $q^{(\delta)}$  の関係式

$$q^{(\delta)} = \frac{\ln \alpha_F^{(\delta)}}{\ln \delta} \quad (42)$$

が得られる。

$|L'|_j(\mu)$  の上から  $k$  番目のグループに属する、島  $I_{j\delta^{k-1}}^{(k)}$  ( $j = 1, 2, \dots, \delta - 1$ ) で特徴付けられる  $\delta - 1$  本の点列内の値を、左端の時刻  $i = j\delta^{k-1}$  の値で置き換えると、(41) のスケーリング則より第  $k$  番目の束に含まれる点の導関数の絶対値は、

$$\left| \frac{\partial L}{\partial z} \right| (z_{\delta^k}, \mu_\infty^{(\delta)}) = \frac{|F'|_1}{(\alpha_F^{(\delta)})^k} \quad (43)$$

となる。軌道点  $z_{\delta^k}$  に於ける写像の導関数の絶対値は  $1/\alpha_F^{(\delta)}$  の間隔で並ぶ。即ち、仮定  $C2$  が導き出される。この近似により各時刻での写像の導関数の絶対値を用いて求めた。時刻  $i = \delta^k + 1$  での軌道間隔変化率

$$\Xi_{\delta^k+1} = \frac{(|L'|_1)^{\delta^k}}{(\alpha_F^{(\delta)})^{(\delta^k-1)/(\delta-1)}} = \frac{(\Xi_2)^{\delta^k}}{(\alpha_F^{(\delta)})^{(\delta^k-1)/(\delta-1)}} \quad (44)$$

が、 $k \rightarrow \infty$  で有限となる条件より、

$$\Xi_2 = |L'|_1 = (\alpha_F^{(\delta)})^{\frac{1}{\delta-1}} \quad (45)$$

と求まる。(42) 式に (45) 式を代入すると  $q_\delta$  の結果 (32) 式となることから、Feigenbaum のスケーリング関係式と  $\Xi_i$  の普遍構造  $F1$ ,  $F2$  および仮定  $C1$ ,  $C2$  は両立していることが分かる。

## 4.2 $\delta^\infty$ SSPO のスケーリング関係式

$\delta^K$  SSPO の第  $k$  階層の島  $I_i^{(k)}$  内部にある  $\delta^K$  超安定周期軌道の軌道点の総数  $A_i^{(k)}$  は

$$A_i^{(k)} = \delta^K - 2\delta^k \quad (46)$$

である。第  $k$  階層のすべての島に同じ個数の軌道点が分配されるので、 $K$  が十分大きければ島  $I_i^{(k)}$  を覆うボックス  $b_i^{(k)}$  に軌道点を見いだす確率  $p_i^{(k)}$  は、 $i$  によらず

$$p_i^{(k)} = p^{(k)} = \frac{A_i^{(k)}/\delta^k}{\delta^K} = \frac{\delta^K - 2\delta^k}{\delta^K \delta^k} \sim \delta^{-k} \quad (47)$$

となる。島  $I_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \delta^k$ ) の特異性を  $\alpha_i$  とすると、 $p_i^{(k)}$  は

$$p_i^{(k)} = (\ell_i^{(k)})^{\alpha_i} \quad (48)$$

とも表される。 $\alpha_i$  の特異性を持つボックス  $b_i^{(k)}$  の個数  $\#(b_i^{(k)})$  は、 $\delta^\infty$  SSPO のマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  によって

$$\#(b_i^{(k)}) \sim (\ell_i^{(k)})^{-f(\alpha_i)} \quad (49)$$

と与えられる [10, 11]。第  $k$  階層の最小幅の島  $I_1^{(k)}$  および最大幅の島  $I_{\delta^k}^{(k)}$  を覆うボックスの個数  $\#(b_i^{(k)})$  は 1 である。従って、 $\delta^\infty$  SSPO のマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  の二つのゼロ点、すなわち  $f(\alpha) = 0$  となる  $\alpha = \alpha_-$  および  $\alpha_+$  ( $\alpha_- < \alpha_+$ ) は、それぞれ第  $k$  階層の最小幅の島  $I_1^{(k)}$  および最大幅の島  $I_{\delta^k}^{(k)}$  の特異性を与える。(47) および (48) より

$$\ell_1^{(k)} = (p^{(k)})^{1/\alpha_-} = \delta^{-k/\alpha_-}, \quad \ell_{\delta^k}^{(k)} = (p^{(k)})^{1/\alpha_+} = \delta^{-k/\alpha_+} \quad (50)$$

である。 $k$  が十分大きければ  $\Xi_{\delta^k}$  は、

$$\Xi_{\delta^k} \sim \frac{\ell_{\delta^k}^{(k)}}{\ell_1^{(k)}} = \delta^{-k(1/\alpha_+ - 1/\alpha_-)} \quad (51)$$

と近似できる。(51) を (29) に代入すると

$$q^{(\delta)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \Xi_{\delta^{k+1}} - \ln \Xi_{\delta^k}}{\ln \delta^{k+1} - \ln \delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-k(1/\alpha_+ - 1/\alpha_-) \ln \delta}{k \ln \delta} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \quad (52)$$

を得る [13, 14]。また、(33) より

$$Q^{(\delta)} \frac{\ln(2 - 1/\delta)}{\ln \delta} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \quad (53)$$

が得られる [12]。

第  $k$  階層の最大幅の島  $I_{\delta^k}^{(k)}$  の幅  $\ell_{\delta^k}$  は (41) 式より

$$\ell_{\delta^k} = |z_{\delta^k} - z_{2\delta^k}| \sim \left| \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^k} \hat{g}^{(\delta)}(0) - \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^{2k}} \hat{g}^{(\delta)}(0) \right| = \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^k} \left( 1 - \frac{1}{\alpha_F^{(\delta)}} \right) \hat{g}^{(\delta)}(0) \quad (54)$$

となる。最小幅の島  $I_1^{(k)}$  の幅  $\ell_1$  も同様に

$$\ell_1 = |z_1 - z_{1+\delta^k}| = \mu_\infty^{(\delta)} (z_{\delta^k})^2 \sim \frac{1}{(\alpha_F^{(\delta)})^{2k}} (\hat{g}^{(\delta)}(0))^2 \quad (55)$$

となる。(50) 式より

$$\alpha_- = \frac{\ln \delta}{2 \ln \alpha_F^{(\delta)}}, \quad \alpha_+ = \frac{\ln \delta}{\ln \alpha_F^{(\delta)}} \quad (56)$$

を得る。この結果を (52) に代入すると、Feigenbaum のスケーリングより求めた (42) に一致する。

実際に、 $3^{12}$ 、 $4^{10}$ 、 $5^8$ 、 $6^7$  周期軌道について、各軌道の軌道点の階層構造より求めた  $\alpha_{\pm}^{(\delta)}$  から (56) 式で得られる  $\alpha_{\pm}$  を用いて求めた  $q^{(\delta)}$  および  $Q^{(\delta)}$  と実際の軌道間隔変化率のべき指数から求めた結果を表 1 に示す。 $n$  が小さい場合、 $Q^{(\delta)}$  を求めるための点の数が少ないことによる誤差が大きくなるため、スケーリング関係式 (53) とのずれが大きくなる。

表 1:  $3^{12}$ 、 $4^{10}$ 、 $5^8$ 、 $6^7$  周期軌道での  $q_{(\delta)}$  および  $Q_{(\delta)}$  の値

周期	(52) 式から 求めた $q^{(\delta)}$	データから 求めた $q^{(\delta)}$	(53) 式から 求めた $Q^{(\delta)}$	データから 求めた $Q^{(\delta)}$
$3^{12}$	2.02763	2.0244	4.3607	4.2737
$4^{10}$	2.63935	2.6376	6.5382	6.5492
$5^8$	1.86533	1.8632	5.1075	5.1111
$6^7$	2.64826	2.6461	7.8283	7.8271

## 5 まとめ

1 次元離散力学系のカオス領域には無数の  $\delta$  周期の窓が開いており、その中には  $\delta^\infty$  SSPO が存在する。 $\delta^\infty$  SSPO は、その軌道点を適切に連結することで  $\delta$  スケール Cantor 集合と同等な階層構造を持つ。 $\delta^\infty$  の第  $k$  階層は  $\delta^k$  個の様々な大きさの島によって構成される。写像によって最小幅の島  $I_1^{(k)}$  から最大幅の島  $I_{\delta^k}^{(k)}$  へと推移する過程は、 $\delta^\infty$  SSPO の軌道間隔変化率  $\Xi_i (1 \leq i \leq \delta^k)$  に表れる。SSPO の間欠性が顕著な領域として、写像導関数の絶対値が最大となる島  $I_1^{(k)}$  から別れ出る  $\delta$  個の島の端に位置する軌道点に着目することとした。着目した軌道点に対する時刻  $i = 1 + (p-1)\delta^k + \delta^k$  ( $p = 1, 2, \dots, \delta$ ) に於ける軌道間隔変化率  $\Xi_i$  を解析した結果、 $k$  によらずほぼ一定の冪指数で冪的に増大し、その指数  $Q^{(\delta)}$  がスケーリング関係式 (53) 式で与えられることが明らかとなった。

充分発達した乱流の系をスケール  $\ell_0 \delta^{-k}$  の  $k$  を変えながら一連の PDF を求めることは、乱流の中から  $\delta$  スケール Cantor 集合と同等な階層構造を抽出していると考えられる。抽出した  $\delta$  スケール Cantor 集合は、 $\delta$  に依存しないマルチフラクタル・スペクトルを持っている。すなわち、充分発達した乱流系は、あらゆる  $\delta$  の値に対する  $\delta$  スケール Cantor 集合が、同じマルチフラクタル・スペクトルを持って集積したものと予想される。一方で、力学系の  $\delta^\infty$  SSPO のマルチフラクタル・スペクトルは、軌道毎に異なっている。さらに、 $\delta^\infty$  SSPO のマルチフラクタル・スペクトルの二つの零点  $\alpha_{\pm}$  の間には  $\alpha_- = 2\alpha_+$  の関係が成り立っている。従って、充分発達した乱流と離散力学系の  $\delta^\infty$



SSPO の階層構造はトポロジカルには  $\delta$  スケール Cantor 集合として同一であるが、マルチフラクタル構造は異なると思われる。この構造の違いが、MPDFT の要請に基づくスケーリング関係式 (2) と、 $\delta^\infty$  SSPO に対する関係式 (53) の左辺分子の  $\ln$  中の  $1/\delta$  の項の違いをもたらしていると予想される。

$3^{12}$  SSPO 近傍に存在する軌道の軌道間隔変化率  $\varepsilon_i$  を解析すると、図 9 に示すように、MPDFT のスケーリング関係式 (2) で与えられる冪指数での増大がしばしば観測される。MPDFT のスケーリング関係式に従って増大する領域の軌道点を抽出し、その構造を解析した結果、 $3^5$  USPO とよく似た構造を持つことが明らかとなった。従って、 $\delta^\infty$  SSPO が不安定化して  $\delta^\infty$  USPO になった後に、MPDFT と同じスケーリング関係式が成り立つのではないかと予想される。充分発達したカオス状態では、すべての  $\delta^\infty$  SSPO は  $\delta^\infty$  USPO となって共存しており、充分発達した乱流とよく似た状況にある。従って、充分発達したカオス状態に於ける  $\delta^\infty$  USPO の階層構造と不安定性を解析することで、充分発達した乱流に於ける MPDFT のスケーリング関係式の物理的意味が明らかとなると予想される [15]。

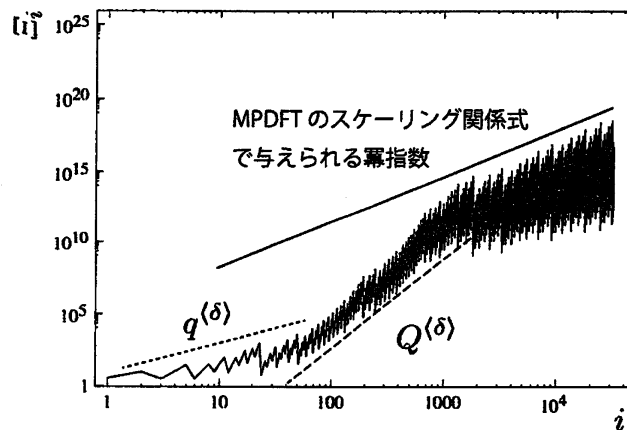


図 9:  $3^{12}$  SSPO 近傍の軌道の軌道間隔変化率の冪的振る舞い。MPDFT のスケーリング関係式 (2) で与えられる冪指数での増大 (実線) が観測される。参考のために、 $q(\delta)$  (点線) および  $Q(\delta)$  (破線) での冪的増大の傾きを示す。

## 参考文献

- [1] T. Arimitsu, and N. Arimitsu, "Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics", Phys. Rev. E **61** (2000) 3237–3240.
- [2] T. Arimitsu, and N. Arimitsu, "Tsallis statistics and fully developed turbulence", J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) L235–L241. [CORRIGENDUM: **34** (2001) 673–674.]
- [3] N. Arimitsu, and T. Arimitsu, "Multifractal Analysis of Turbulence by Statistics based on Non-Extensive Tsallis' or Extensive Renyi's Entropy", J. Korean Phys. Soc. **40** (2002) 1032–1036, and the references therein.

表 2: 本論文で扱う SSPO を与える  $\mu$  の値

$\mu$	値
$\mu_{18}^{(2)}$	1.4011551890902510331817705605834440363471931682725
$\mu_6^{(3)}$	1.7864402555019781908413355335634224247376137076218
$\mu_{12}^{(3)}$	1.7864402555636393545322790707914715195055351711466
$\mu_{10}^{(4)}$	1.9427043547554679721671786758054847819006885415054
$\mu_4^{(5a)}$	1.6319266540998245643564591350247554367783851436151
$\mu_8^{(5a)}$	1.6319266544901080723941838810474934052189502879198
$\mu_4^{(5b)}$	1.9855395300604130165251288736911115285804387989427
$\mu_5^{(5b)}$	1.9855395300604130402761615900578600353019531592425
$\mu_7^{(5b)}$	1.9855395300604130402775645156237020573596964018766
$\mu_7^{(6)}$	1.9075041928266954439688247659645171518860122360285

- [4] T. Arimitsu and N. Arimitsu, “Analysis of PDFs for energy transfer rates from 4096<sup>3</sup> DNS — Verification of the scaling relation within MPDFT,” J. Turbulence **12** (2011) 1–25.
- [5] N. Arimitsu and T. Arimitsu, “Verification of the scaling relation within MPDFT by analyzing PDFs for energy dissipation rates out of 4096<sup>3</sup> DNS,” Physica A **390** (2011) 161–176.
- [6] N. Arimitsu and T. Arimitsu, “マルチフラクタル確率密度関数理論による乱流 PDF の解析”, 本数理研講究録 (2011).
- [7] M. J. Feigenbaum, “The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations,” J. Stat. Phys. **19**(1978), 25–52.
- [8] M. J. Feigenbaum, “Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations,” J. Stat. Phys. **21**(1979), 669–706.
- [9] B. Derrida, A. Gervois, Y. Pomeau, “Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms,” J. Phys. A **12**(1979) 269–275
- [10] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman, “Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets.” Phys. Rev. A **33** (1986) 1141–1151.
- [11] W. Zeng and B. Hao, “Dimensions of the limiting sets of period-n-tupling sequences.” Chinese Phys. Lett. **3** 285–287.

- [12] T. Motoike and T. Arimitsu (2011) in preparation to submit.
- [13] U. M. S. Costa, M. L. Lyra, A. R. Plastino, C. Tsallis, Phys. Rev. E **56** (1997) 245.
- [14] M. L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 53.
- [15] M. Komatsuzaki, T. Motoike, T. Arimitsu, “ $\delta^\infty$  不安定周期軌道の階層構造の解析”, 本数理研講究録 (2011).